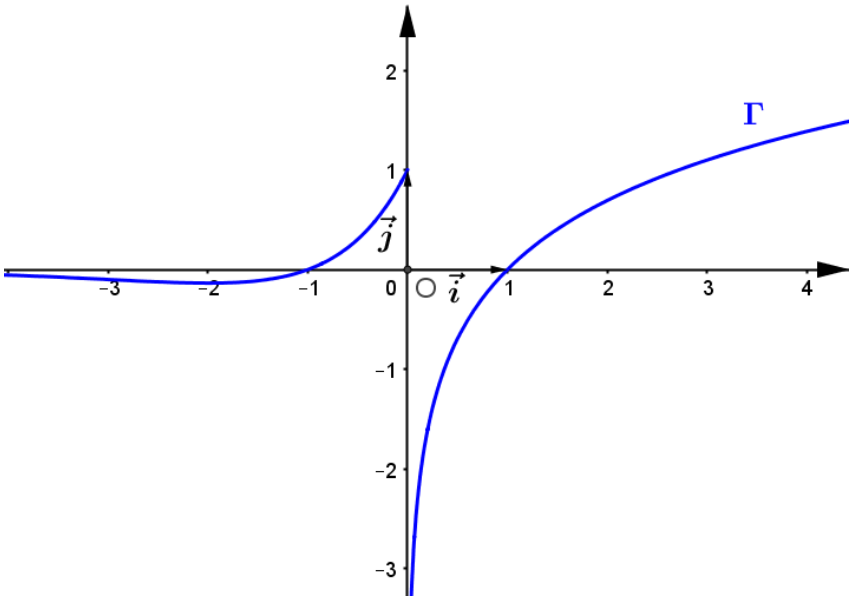
**EXERCICE N°6 :** | **50'** | **7 points**

La courbe $\Gamma$ ci-dessous représente la fonction dérivée seconde de $f''$ d'une fonction $f$ deux fois dérivable sur $IR^*$.

On sait que $f(0)=0$ et on désigne par $C$ la courbe représentative de la fonction $f$.




**1°)** Par lecture graphique déterminer :

**a)** Le signe de $f''$.

**b)** Les points d'inflexion de $C_f$

**2°)** La fonction $f'$ est définie sur IR par :

$$\begin{cases} f'(x)=xe^x & si\ x\le 0 \\ f'(x)=x\ln x-x & si\ x>0 \end{cases}$$

**a)** Montrer que $f'$ est continue en 0.

**b)** Sans expliciter $f''(x)$, dresser le tableau de variation de $f'$

**3°)** Soit $g$ la restriction de $f'$ sur $[1;+\infty[$

**a)** Montrer que $g$ réalise une bijection de $[1;+\infty[$ sur un intervalle que l'on précisera.

**b)** Etudier la position relative de $C_g$ avec la droite $\Delta : y=x$

**c)** Tracer $C_g$ et $C_{g^{-1}}$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$

**4°)** Soit $u$ la suite définie sur $IN$ par : $\begin{cases} u_0=0,5 \\ u_{n+1}=g^{-1}(u_n), \text{ pour tout } n\in IN \end{cases}$.

**a)** Montrer que pour tout $n\in IN$ on a : $0,5\le u_n\le e^2$.

**b)** Montrer que la suite $(u_n)$ est convergente et calculer sa limite.

**5°) a)** Montrer que la fonction : $H : x\mapsto \frac{1}{2}x^2\ln(x)-\frac{3}{4}x^2$ est une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction :

$x\mapsto x\ln x-x$

**b)** Soit la fonction $F$ définie sur IR par : $F(x)=\int_0^x te^t dt$.

Montrer que pour tout $x\in IR$, $F(x)=(x-1)e^x+1$. En déduire l'expression explicite de $f$ sur $IR$.

**c)** Dresser le tableau de variation de $f$ et étudier les branche infinies de $C_f$.

**d)** Tracer $C_f$ et ses tangentes en leurs points d'inflexion dans un nouveau repère.

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn
Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn